مکانیکِ شاره‌ها

امیر آقامحمدی
استاد فیزیک
دانشگاهِ الزهرا

آقامحمدی، امیر، ۱۳٤۰.
مکانیک شاره ها/ نویسنده امیر آقامحمدی.
تهران: دانشگاه الزهرا(س) ، ۱۳۹۲ .
۲۳۰ ص.- (دانشگاه الزهرا(س) : کد ۲۱۱)
ISBN: 978- 600- 5002-59-1
فهرست نویسی براساس اطلاعات فیپا.
بالای عنوان: سیالات - مکانیک/ سیالات - مکانیک -- مسائل، تمرین‌ها و غیره/نمایه.
عنوان اصلی: مکانیک شاره ها
رده بندی کنگره : ۱۳۹۱ ۷ م ۷ آ /۱٤٥/۲/ QC
رده بندی دیویی: ٥۳۲

نام کتاب: مکانیک شاره ها

مؤلف: دکتر امیر آقا محمدی(عضو هیات علمی دانشگاه الزهراء(س))

ویراستار: دکتر احمد شریعتی

مدیر اجرایی: دکتر فاطمه عباسی

ناشر: دانشگاه الزهراء (س)

تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه

نوبت چاپ: دوم – ۱۳۹٥

قیمت: ۱۸۰۰۰ تومان

کلیه حقوق برای دانشگاه الزهرا (س) محفوظ است

مراکز پخش:

ونک – دانشگاه الزهراء (س) تلفن: ۸۵۶۹۲۷۶۹- ۸۸۰۴۸۹۳۳

بلوار کشاورز - نبش ۱۶ آذر – انتشارات دانشگاه الزهراء(س)

وبگاه فروش اینترنتی: http://research.alzahra.ac.ir

تقدیم به

هم‌سر و هم‌راهم مینا

و

پسرانم سینا و علیرضا

فهرست

مقدمه . . . . . الف

۱ استاتیکِ شاره‌ها ۱

۱.۱ تعریفِ شاره ۱

۲.۱ استاتیک شاره‌ها ۵

۳.۱ قانونِ ارشمیدس ۱۸

۴.۱ حرکتِ پایایِ یک شاره‌یِ تراکم ناپذیر ۲۲

۵.۱ کششِ سطحی ۲۶

۶.۱ چسبندگی ۳۸

۷.۱ مسائل ۵۰

۲ سینماتیک شاره‌ها I: شارِش ۶۱

۱.۲ شارِش ۶۱

۲.۲ مسائل ۷۰

۳ گران‌روی ۷۵

۱.۳ گران‌روی ۷۵

۲.۳ شرایطِ مرزی ۸۱

۳.۳ چند مثال ۸۳

۴.۳ مسائل ۹۴

۴ دینامیک شاره‌ها I: قانونِ برنولی ۹۷
۱.۴ معادله‌یِ پیوستگی و پایستگی‌یِ جرم ۹۷
۲.۴ معادله‌یِ برنولی ۱۰۲
۳.۴ قانونِ نیوتن برایِ شاره‌هایِ غیرِچرخشی ۱۱۱
۴.۴ مسائل ۱۱۲

۵ سینماتیک شاره‌ها II: انتقال، دوران، و کُرنش ۱۱۷
۱.۵ انتقال، دوران، و کُرنش ۱۱۷
۲.۵ مسائل ۱۲۸

۶ شاره‌یِ پتانسیلی‌یِ تراکم‌ناپذیر ۱۳۱
۱.۶ شاره‌یِ پتانسیلی‌یِ تراکم‌ناپذیر ۱۳۱
۱.۱.۶ شاره‌هایِ پتانسیلی‌یِ دوبُعدی ۱۳۲
۲.۶ شاره‌هایِ بنیادی ۱۳۷
۱.۲.۶ شاره‌هایِ بنیادی‌یِ دوبُعدی ۱۳۸
۲.۲.۶ کلی‌ترین شاره‌هایِ پتانسیلی در دو بُعد ۱۵۳
۳.۲.۶ شاره‌هایِ پتانسیلی در دو بُعد و تابع‌هایِ مختلط ۱۵۴
۳.۶ شاره‌هایِ پتانسیلی‌یِ سه‌بُعدی با تقارنِ محوری ۱۵۶
۴.۶ روشِ تصویر ۱۵۹
۵.۶ مسائل ۱۶۰

۷ تحلیلِ ابعادی و مدل‌سازی ۱۶۷
۱.۷ تحلیلِ ابعادی ۱۶۷
۲.۷ بی‌بُعد کردنِ معادله‌یِ دیفرانسیل ۱۸۱
۳.۷ مسائل ۱۸۲

۸ تنش ۱۸۷
۱.۸ تنش ۱۸۷
۲.۸ تانسورِ تنش برایِ یک شاره‌یِ ساکن ۱۹۲
۳.۸ تانسورِ تنش برایِ یک شاره‌یِ متحرک ۱۹۳

۴.۸ مسائل ۱۹۶

۹ دینامیکِ شاره‌ها II: معادله‌یِ نَوی-اِستُکس ۱۹۹
۱.۹ معادله‌هایِ حجمِ کنترل ۲۰۰
۲.۹ معادله‌یِ نوی-استکس ۲۰۵
۱.۲.۹ حالتِ پایا ۲۰۷
۲.۲.۹ حالتِ غیرِ پایا ۲۱۶
۳.۹ مسائل ۲۲۱

پیوست ۲۲۵
محاسبه‌یِ شعاعِ انحنایِ یک خم ۲۲۵
شعاعِ انحناهایِ یک رویه ۲۲۷

کتاب نامه ۲۳۱

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۲۳۴

نمایه ۲۳۷

مقدمه

من زمانی قرار شد درسِ مکانیکِ شاره‌ها را در دانشگاهِ الزهرا تدریس کنم. با بررسیِ کتبِ فارسیِ موجود در بازارِ کتاب به این نتیجه رسیدم که بیش‌ترِ کتاب‌هایِ سیالاتِ به زبانِ فارسی با رهیافتی مهندسی به این موضوع پرداخته‌اند و کتابِ فارسی با مباحثی که بیش‌تر موردِ توجهِ من است، یعنی با رهیافتی فیزیکی، کم است. علاوه بر این بینِ کتاب‌هایِ لاتین نیز برخی از کتاب‌ها پیش‌رفته‌تر و بعضی سطحی‌تر به موضوع پرداخته بودند. به همین دلیل تصمیم گرفتم درس‌نامه‌ای برایِ این درس آماده کنم. پس از آن بارها در دانشگاهِ الزهرا و هم‌چنین دوره‌یِ آمادگی‌یِ المپیادِ فیزیکِ کشوری از این درس‌نامه استفاده کردم. سئوال‌هایی که در امتحان‌هایِ این درس در دانشگاهِ الزهرا و دوره‌یِ المپیادِ فیزیک استفاده کرده‌ام به‌تدریج به مجموعهِ سئوال‌هایِ آخرِ فصلِ این درس‌نامه اضافه شده است. سئوال‌هایی که در کلاسِ درس مطرح می‌شد باعث شد بعضی از بخش‌ها تکمیل و مواردی بیش‌تر تشریح شوند. به جز سه عکس همه‌یِ شکل‌ها و عکس‌ها را خودم تهیه کرده‌ام. در رسمِ شکل‌ها تلاش کردم که آن‌ها حتی‌الامکان دقیق و درست باشند. در این مدت تعدادی از دانش‌جویان اشتباه‌هایِ تایپی، و علمی که در متن پیدا می‌کردند را برای رفعِ اشکال به من می‌دادند که از همه‌یِ آن‌ها به‌خصوص خانمِ سارا مطیع بیرجندی سپاس‌گزارم. به این ترتیب آن درس‌نامه به تدریج کامل و به این کتاب تبدیل شد. تعدادی از هم‌کاران از جمله محمد ابراهیم فولادوند در دانشگاهِ زنجان و امیرحسین‌فتح‌الهی در دانشگاهِ تحصیلاتِ تکمیلی‌یِ زنجان در تدریسِ‌شان از این درس‌نامه استفاده کردند. این دوستان نیز مواردی از خطا که از چشمِ من پنهان مانده بود را تذکر دادند که از هر دویِ آن‌ها بسیار سپاس‌گزارم. در نوشتنِ این کتاب بارها با محمدِ خرمی مشورت کردم. این مشورت‌ها همیشه برایِ من آموزنده بوده است. علاوه بر این از مسائلی که او در امتحان‌هایِ دوره‌یِ المپیاد مطرح کرده بود هم استفاده کرده‌ام و به خاطرِ همه‌یِ این‌ها از او نیز سپاس‌گزارم. احمد شریعتی زحمتِ ویرایشِ کتاب را بر عهده داشت. او با وسواس متن را خواند و علاوه بر ویرایشِ ادبی، تذکرهایِ علمی‌یِ سودمندی هم داد که مرا قدردانِ خود کرد. خوش‌حال خواهم شد که اگر با اشکالی در کتاب مواجه شدید، من را آگاه کنید تا در چاپ‌هایِ بعدی اصلاح شود. در تهیه‌یِ شکلِ الکترونیکی‌یِ کتاب احمدِ شریعتی، امیرحسینِ فتح‌الهی و محمدِ خرمی راه‌نمایی‌هایِ ارزشمندی به من کردند که بابتِ این کمک‌ها نیز از آن‌ها سپاسگزارم. در خاتمه لازم

می‌دانم از معاونتِ محترمِ پژوهشی‌یِ دانشگاهِ الزهرا و بخشِ انتشاراتِ آن بابت چاپِ این کتاب تشکر کنم.

فصل ۱

استاتیکِ شاره‌ها

در این فصل ابتدا به تعریف شاره می‌پردازیم و به این سئوال که "فرقِ شاره با جامد چیست؟" گازها و مایعات دو شکل از ماده هستند که در ضمن شاره هم هستند. پس از آن بحث خود را به شاره‌یِ ساکن یعنی شاره‌ای که برایِ آن چارچوبی وجود دارد که کلِ شاره در آن چارچوب ساکن است، محدود می‌کنیم. برایِ بررسی‌یِ تعادل در شاره‌یِ ساکن لازم است ابتدا فشار درونِ یک شاره را تعریف کنیم. برایِ آشنا شدن با مطلب بحثِ خود را با چند مثال ادامه می‌دهیم. در این مرحله می‌توانیم به قانونِ ارشمیدس بپردازیم، قانونی که بررسی‌یِ شناوری‌یِ اجسام بر اساسِ آن است. در انتهایِ فصل کششِ سطحی و چسبندگی یک مایع را معرفی می‌کنیم. این‌ها پارامترهایی هستند که به مایع و محیطِ اطرافِ آن بستگی دارند و در تعیینِ شکلِ سطحِ آزادِ مایع نقش دارند.

۱.۱ تعریفِ شاره

قطعه چوبی که رویِ آب شناور است را در نظر بگیرید. وقتی‌که قطعه چوب را رویِ آب می‌کشیم شروع به حرکت می‌کند، و هم‌راهِ خود آب را نیز می‌کشد. نیرویی مماسی بینِ قطعه چوب و آب ایجاد می‌شود که باعثِ شارشِ آب می‌شود. سطحی درونِ سیال در نظر بگیرید. این سطح سیال را به دو بخش تقسیم می‌کند که آن‌ها را مثلاً سمتِ راست و سمتِ چپ می‌نامیم. سیالِ سمتِ راست نیرویی به سیالِ سمتِ چپ وارد می‌کند. چون

منشاءِ آن نیروهایِ مولکولی است، می‌توان تصور کرد که فقط به سطحِ سیالِ سمتِ چپ وارد می‌شود. این نیرو را می‌توان به دو مؤلفه‌یِ مماس بر سطح و عمود بر آن تجزیه کرد. نیرویِ عمود بر سطح نیرویی فشاری یا کششی است و نیرویِ مماس بر سطح نیرویی برشی است. اگر جسمِ جامد تحتِ نیرویِ کششی یا فشاری‌یِ بزرگی قرار گیرد بسته به اندازه‌یِ نیرو ممکن است کمی کشیده یا فشرده می‌شود. اما گازها به راحتی منبسط یا فشرده می‌شوند. مایعات از این نظر بیش‌تر شبیهِ جامدات هستند یعنی برایِ آن‌که فشرده شوند و تغییرِ حجم پیدا کنند باید تحتِ تأثیرِ نیرویِ بزرگی قرار گیرند. بعضی مایعات تراکم‌پذیر و بعضی تراکم‌ناپذیراند. آب مایعی تقریباً تراکم‌ناپذیر است. شاره بر عکسِ جامد چیزی است که تحتِ تاثیرِ نیروهایِ بُرشی هرچه‌قدر کوچک هم که باشد جریان پیدا می‌کند. در شاره‌یِ متحرک ممکن است نیرویِ برشی وجود داشته باشد اما در شاره‌یِ ساکن نیرویِ برشی وجود ندارد. بنابراین اگر بخشی از شاره‌یِ ساکنی را در نظر بگیریم نیرویی که از طرفِ بخشِ دیگرِ شاره به آن وارد می‌شود نیرویِ عمود بر سطحِ آن است. اگر به جسمی جامد نیرویی برشی وارد کنیم بسته به اندازه‌یِ نیرو جسمِ جامد تغییرِ شکل می‌دهد. هرچه نیرویِ برشی بزرگ‌تر باشد تغییرِ شکلِ جسمِ جامد بیش‌تر است. البته اگر نیرویِ برشی‌یِ اعمال‌شده به جسمِ جامد بر واحدِ سطح از مقداری حدّی که به آن حدِّ کش‌سانی می‌گوییم بزرگ‌تر شود جسمِ جامد می‌شکند. اما در شاره‌ها وضع فرق می‌کند. یک شاره‌یِ ساکن نیرویِ برشی را نمی‌تواند تحمل کند و پیوسته تغییرِ شکل می‌دهد. اگر قایقی را رویِ سطحِ آب بکشیم، نیرویی برشی بر لایه‌یِ آبِ مجاورِ قایق وارد می‌شود و آن را هم‌راهِ قایق می‌کشد. این لایه هم به سهمِ خود لایه‌یِ زیرینِ آب را با خود می‌کشد. لایه‌هایِ پایین‌تر با سرعتِ کم‌تری کشیده می‌شوند. در واقع فرقِ شاره و جامد در همین جاست. جسمِ جامد نیرویِ برشی را تحمل می‌کند. جامد ممکن است تحتِ اثرِ نیرویِ برشی تغییرِ شکل دهد تا آن‌که به تعادل برسد، اما شاره اگر پیوسته تحتِ تأثیرِ نیرویِ برشی باشد جاری می‌شود و به تعادل هم نمی‌رسد. مایعات و گازها شاره هستند.

یک فرقِ اساسی‌یِ دیگرِ شاره با جامد در شکلِ آن‌هاست. ذراتِ تشکیل‌دهنده‌یِ جسمِ جامد حولِ نقطه تعادل‌شان نوسان می‌کنند و نمی‌توانند از جایی در جسمِ جامد به هر جایِ دیگری در همان جسم بروند. بنا بر این جسمِ جامد شکلِ معینی دارد. اما شاره شکلِ معینی ندارد و اجزایِ مختلف آن به آزادی نسبت به هم حرکت می‌کنند. اگر شاره ساکن باشد شکلِ ظرف را به خود می‌گیرد. گاز کلِ ظرف را پُر می‌کند و سطحِ مرزی‌یِ

گاز همان جداره‌یِ داخلی‌یِ ظرف است. ولی مایع علاوه بر سطح‌هایی که مجاورِ سطحِ ظرف است، سطحِ آزاد هم دارد. لیوانِ آبی را در نظر بگیرید. سطحِ بالایی‌یِ آب، سطحِ آزاد است. البته این طور هم نیست که مرزِ دقیقی بین جامدات و شاره‌ها وجود داشته باشد. دو حدِ مختلفِ وجود دارد: جسمِ کاملاً صلب و شاره‌یِ ایده‌آل. موادِ مختلف بینِ این دو ناحیه هستند. یک ماده گاهی اوقات از خود رفتاری شبیه جامدات و گاهی رفتاری شبیهِ شاره‌ها نشان می‌دهد. اگر نشاسته‌یِ ذرت را در آب حل کنیم ماده‌ای به دست می‌آید که ظاهرش شبیهِ یک شاره است. می‌تواند جاری شود اما اگر به همین ماده ضربه بزنیم مثلِ یک جامد رفتار می‌کند. اگر فردی رویِ استخری از این شاره بایستد با آهسته رویِ آن راه برود در آن فرو می‌رود، اما به راحتی می‌توان رویِ استخری از این شاره دوید.

شاره ممکن است ساکن باشد یا آن‌که جریان داشته باشد. یک لیوانِ آب را در نظر بگیرید. وقتی می‌گوییم آبی ساکن است منظورِمان این نیست که همه‌یِ ملکول‌هایِ آب ساکن‌اند، بل‌که منظور این است که اگر بخشِ بسیار کوچکی از آب را در نظر بگیریم سرعتِ متوسطِ ملکول‌هایِ آب در این بخش صفر است. ابعادِ این بخشِ کوچکِ شاره نسبت به ابعادِ ماکروسکوپیکِ سیستم، یعنی مثلاً ابعادِ ظرف بسیار کوچک و نسبت به فاصله‌یِ نوعی‌یِ ملکول‌هایِ شاره بسیار بزرگ است. به این بخشِ کوچک از شاره عنصرِ شاره می‌گوییم. عنصرِ شاره حاوی‌یِ تعدادِ بسیار زیادی ذره است و بردارِ سرعتِ عنصرِ شاره متوسطِ بردارِ سرعتِ ذراتِ درونِ این عنصرِ شاره است. اگر چه سرعتِ هر ذره با ذره‌یِ مجاور ممکن است بسیار متفاوت باشد، چون تعدادِ ذراتِ درونِ شاره بسیار زیاد است، این سرعتِ متوسط که به عنصرِ شاره نسبت می‌دهیم مثلِ یک کمیتِ پیوسته رفتار می‌کند. به این ترتیب ما شاره را به صورتِ یک محیط پیوسته در نظر می‌گیریم. پس وقتی می‌گوییم شاره‌ای ساکن است منظورِمان این نیست که همه‌یِ ملکول‌هایِ‌تشکیل دهنده‌یِ شاره ساکن‌اند، بل‌که منظور این است که اگر عنصرِ کوچکی از شاره، مثلاً به حجمِ ΔV، را در نظر بگیریم متوسطِ بردارِ سرعتِ ملکول‌هایِ شاره، $\bar{\mathbf{v}}$، در این عنصر حجم صفر است. تعدادِ ملکول‌هایِ درونِ این عنصرِ شاره N، بردارِ سرعتِ ملکولِ i اُم $\mathbf{v}_i$ و اندازه‌یِ آن v_i است. در این صورت

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{v}_i = 0. \qquad (۱.۱)$$

در متوسط‌گیری رویِ بردارِ سرعتِ ملکول‌هایِ مختلف جمع می‌بندیم و توجه داریم که این بردارها در جهت‌هایِ مختلف هستند. اما $\bar{v}$،

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i, \qquad (۲.۱)$$

متوسطِ اندازه‌یِ سرعتِ ملکول‌هایِ یک شاره‌یِ ساکن نه تنها صفر نیست بل‌که می‌تواند عددِ بزرگی هم باشد. در جدولِ (۱.۱) سرعتِ متوسطِ ملکول‌های چند گاز در دمایِ بیست درجه‌یِ سانتی‌گراد آمده است.

گاز	سرعتِ متوسط $\bar{v}$,
H_2	1.9×10^3 m s^{-1}
He	1.3×10^3 m s^{-1}
Ne	0.6×10^3 m s^{-1}
N_2	0.6×10^3 m s^{-1}
CO_2	0.4×10^3 m s^{-1}

جدول ۱.۱: سرعتِ متوسطِ ملکول‌های چند گاز در دمایِ بیست درجه‌یِ سانتی‌گراد.

فلزی جامد در نظر بگیرید. ذراتِ تشکیل دهنده‌یِ این فلز در شبکه‌ای منظم کنارِ هم قرار گرفته‌اند، و ذراتِ تشکیل دهنده‌یِ شیشه به شکلی بی‌نظم کنار هم قرار گرفته‌اند. ملکول‌ها یا اتم‌هایِ سازنده‌یِ جسمِ جامد تقریباً ساکن هستند و حولِ نقطه‌تعادل‌شان نوسان می‌کنند. هرچه دمایِ جسم بالاتر رود دامنه‌یِ نوسانِ این ذرات بزرگ‌تر می‌شود. فاصله‌یِ نسبی‌یِ ملکول‌ها در مایعات و جامدها نوعاً شبیهِ هم و کوچک‌تر از فاصله‌یِ نسبی‌یِ ملکول‌ها در گازها است. اگر مقداری آب را رویِ زمین بریزیم، پس از مدتی همه‌یِ آب تبخیر و زمین خشک می‌شود. بخارِ آب در اطرافِ آن ناحیه پخش می‌شود. در این فرآیندِ تبخیر فاصله‌یِ متوسطِ بینِ دو ملکولِ مجاورِ آب زیاد می‌شود. در یک سانتی‌مترِ مکعب آب حدودِ 10^{22} و در یک گاز در فشار و دمایِ متعارف حدودِ 10^{19} ملکول وجود دارد. البته گاز می‌تواند خیلی رقیق و یا بر عکس خیلی غلیظ باشد. در 18 گرم آب به اندازه‌یِ عددِ آووگادرو، 6.02×10^{23}، ملکولِ آب وجود دارد. با توجه به این‌که چگالی‌یِ آب تقریباً $10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ است، تعدادِ ملکول‌هایِ آب در واحد حجم به سادگی

به دست می‌آید

$$\frac{6.02 \times 10^{23}}{18 \times 10^{-3}} \times 10^{3} \approx 0.3 \times 10^{29} \ \frac{\text{molecule}}{\text{m}^3}$$

سهمی که به هر ملکولِ آب می‌رسد عکسِ این عدد یعنی حدودِ $3 \times 10^{-29} \ \text{m}^3$ و فاصله‌یِ نسبی‌یِ دو ملکولِ آب ریشه‌یِ سومِ این عدد و از مرتبه‌یِ

$$d \approx 10^{-10} \ \text{m}, \tag{۳.۱}$$

است. اما وضعیت گازها کمی فرق دارد. گاز حجمِ معینی ندارد و با تغییرِ دما و فشار، حجم آن و همین‌طور تعداد ملکولِ در واحدِ حجمش عوض می‌شود. چگالی‌یِ آهن یعنی جرم بر واحدِ حجمِ آن $7.8 \times 10^{3} \ \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ و عددِ جرمی‌یِ آهن 56 است، یعنی اگر به اندازه‌یِ عددِ آووگادرو، یعنی 6.02×10^{23}، اتمِ آهن را در نظر بگیریم وزنش $56 \times 10^{-3} \ \text{Kg}$ می‌شود. با محاسبه‌ای شبیهِ آن‌چه برایِ آب انجام دادیم نتیجه می‌شود که فاصله‌یِ نسبی‌یِ دو اتمِ آهن در یک قطعه‌یِ آهن هم از مرتبه‌یِ

$$d \approx 10^{-10} \ \text{m}, \tag{۴.۱}$$

است.

۲.۱ استاتیک شاره‌ها

در مکانیکِ ذرات قوانینِ حاکم بر حرکتِ ذرات قوانینِ نیوتن است. برایِ بررسی‌یِ تعادلِ اجسامِ صلب نیز از قوانینِ نیوتن استفاده می‌کنیم. شاره‌ها هم هرچند صلب نیستند و شکلِ خاصی نیز ندارند، اما قوانینِ حاکم بر حرکتِ آن‌ها نیز قوانینِ نیوتن است[۱]. در ابتدا بررسی خود را محدود به حالت‌هایی می‌کنیم که یا شاره ساکن است و یا اگر متحرک است، اجزایِ شاره نسبت به هم ساکن اند. در این صورت حتماً می‌توان چارچوبی پیدا کرد که شاره در آن ساکن باشد. اما همان‌طور که دیدیم در شاره‌ای که ساکن است نیروهایِ برشی وجود ندارند و نیرویِ وارد بر عنصری از شاره از طرفِ شاره‌یِ مجاورش عمود بر سطحِ عنصرِ شاره است.

[۱] برای یک بحثِ مقدماتی‌تر در موردِ استاتیکِ شاره‌ها می‌توانید مرجعِ [۱] را ببینید.

دو دسته نیرو به هر عنصرِ شاره وارد می‌شود. یکی نیروهایی حجمی هستند، یعنی نیروهایی که اگر بر عنصری از شاره اثر کنند متناسب‌اند با حجمِ آن عنصرِ شاره. دسته‌یِ دیگر نیروهایِ متناسب با سطح هستند. نیرویِ گرانش مثالی است از نیروهایِ حجمی. این نیرو بلندبُرد است. نیرویی بلندبرد است که در هیچ فاصله‌یِ محدودی صفر نشود. بستگی‌یِ نیرویِ گرانش به فاصله، r، برایِ دو جرمِ نقطه‌ای به صورتِ $\frac{1}{r^2}$ است و نیرویِ وارد بر جرمِ m با اندازه‌یِ جرم متناسب است. بعضی از نیروها در طبیعت بلندبرد و برخی کوتاه‌برد هستند. نیروهایِ کوتاه‌بُرد منشأِ ملکولی دارند، با دور شدن از چشمه‌یِ نیرو به سرعت کوچک می‌شوند و تنها در فواصلی از مرتبه‌یِ اندازه‌یِ ملکول قابلِ‌ملاحظه‌اند. وقتی دو جسم به حدِ کافی به هم نزدیک باشند، یا در واقع در تماسِ با هم باشند نیروهایِ کوتاه‌بُرد مهم می‌شوند. بنا بر این اگر سطحی را درونِ ماده‌ای در نظر بگیریم، ملکول‌هایِ دو طرفِ سطح نیروهایِ کوتاه‌بُردی به هم وارد می‌کنند و اندازه‌یِ کلِ نیرو با تعدادِ این ملکول‌ها یا اندازه‌یِ سطح متناسب است. نیروهایِ فشاری یا برشی متناسب با سطح هستند. از دیدِ میکروسکوپی نیروهایِ فشاری یا برشی ناشی از برخورد و یا انتقالِ تکانه هستند. نیروهایِ بلندبُردِ دیگری مثلِ نیروهایِ کولنی نیز اگر رویِ عنصرِ شاره اثر کنند، مانندِ نیرویِ گرانش متناسب با حجمِ عنصرِ شاره هستند. عنصرِ شاره‌ای با طولِ مشخصه‌یِ L در نظر بگیرید[۲]. در حدّی که اندازه‌یِ عنصرِ شاره به سمتِ صفر می‌رود نیروهایی که متناسب با حجم هستند به صورتِ L^3 و نیروهایی که متناسب با سطح هستند متناسب با L^2 به سمتِ صفر می‌روند.

سطحِ کوچکِ δA را در نظر بگیرید. ابتدا فشار را که با p نشان می‌دهیم به عنوانِ نیرویِ عمودی‌یِ وارد بر واحدِ سطح تعریف می‌کنیم، پس فشار عبارت است از

$$p := \frac{F_{\delta A}}{\delta A}. \tag{۵.۱}$$

که $F_{\delta A}$ نیرویِ عمود بر سطحِ δA و علامتِ $:=$ یعنی **تعریف می‌شود با**. بُعدِ فشار[۳] نیرو بر واحدِ سطح و واحدِ آن نیوتن بر مترِ مربع است. این را به صورتِ زیر نشان می‌دهیم

$$[P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}.$$

---

[۲] مثلاً عنصری مکعبی به طولِ L یا کره‌ای از شاره به شعاعِ L .

[۳] بُعدِ کمیتِ A را با $[A]$ نشان می‌دهیم.

واحدِ فشار را پاسکال می‌نامیم و با Pa نمایش می‌دهیم.

$$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

فرض کنید شاره‌ای به چگالی‌یِ ρ که درونِ ظرفی ساکن است، تحتِ تأثیرِ نیرویِ گرانشِ در راستایِ محورِ z، در حالِ تعادل است. عنصرِ خیلی کوچکی از شاره مطابقِ شکلِ (۱-۱) در نظر بگیرید. نیروهایِ وارد بر این عنصرِ شاره شش‌تا هستند: نیرویِ حجمی‌یِ وزن، و پنج نیرویِ سطحی‌یِ فشاری. چون شاره در حالِ تعادل است، برآیندِ این نیروها صفر است. فشار تابعی از مکان است و ممکن است مقدارش از نقطه‌ای به نقطه‌یِ دیگر عوض شود. فشار در مرکزِ مستطیلی با ابعادِ δx و δy را p_z^0، فشار در مرکزِ مستطیلِ با ابعادِ δz و δy را p_x^0، و فشاردر مرکزِ مستطیلِ با ابعادِ δy و δs را p_s^0، و بالاخره فشار در مرکزِ مثلث‌ها را p_1^0 و p_2^0 بگیرید. این سطح‌ها را خیلی کوچک می‌گیریم. در این‌صورت فشار در نقطه‌یِ دل‌خواهی رویِ سطحِ $\delta x\delta y$، که با p_z نمایش می‌دهیم با فشار در مرکزِ مستطیل به صورتِ زیر مربوط است

$$p_z \approx p_z^0 + \mathcal{O}(\delta x) + \mathcal{O}(\delta y). \tag{۶.۱}$$

در این رابطه p_z را حولِ مقدارِ آن در مرکزِ مستطیل بسطِ تیلورِ داده‌ایم و جمله‌یِ $\mathcal{O}(\delta x)$ یعنی جمله‌ای از مرتبه‌یِ δx. چون بعداً می‌خواهیم اندازه‌یِ عنصرِ شاره یعنی δx، δy،و δz را به سمتِ صفر میل دهیم، از جمله‌هایِ دوم و سومِ (۶.۱) چشم‌پوشی می‌کنیم. به این ترتیب در این تقریب مثلِ این است که فشار در همه‌یِ نقاطِ سطح را به تقریب یکی بگیریم. در نهایت وقتی اندازه‌یِ عنصرِ شاره را به سمتِ صفر میل می‌دهیم دیده می‌شود که این تقریبی که به کار برده‌ایم مجاز است. نیرویِ فشاری‌یِ وارد بر هر سطح از ضربِ فشار در اندازه‌یِ سطح به دست می‌آید مثلاً نیرویِ فشاری وارد بر مستطیلِ با ابعادِ δx و δy، $p_z^0(\delta x\delta y)$ است. از این‌که این عنصرِ شاره در حالِ تعادل است نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} p_1^0\left(\frac{1}{2}\delta x\delta z\right) - p_2^0\left(\frac{1}{2}\delta x\delta z\right) = 0, \\ p_x^0\,(\delta y\delta z) - p_s^0\,(\delta s\delta y)\,\sin\theta = 0, \\ p_z^0\,(\delta x\delta y) - p_s^0\,(\delta s\delta y)\,\cos\theta - \rho g\left(\frac{1}{2}\delta x\delta z\right)\delta y = 0. \end{cases} \tag{۷.۱}$$