

به نام خدا



معادلات دیفرانسیل

ریزمواد معادلات دیفرانسیل

مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل
حل معادلات مرتبه‌ی اول و کاربرد آن در طبیعت
حل معادلات مرتبه‌ی دوم و بالاتر و کاربرد در فیزیک و مکانیک
حل برخی معادلات دیفرانسیل به روش سری‌ها
تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل
حل دستگاه معادلات دیفرانسیل

تألیف:

دکتر علی مردان شاهرزائی

عضو هیأت علمی دانشگاه الزهراء (ع)

(جلد اول)

سرشناسه:	شاهرزائی، علیمردان، ۱۳۵۰-
عنوان و نام پدیدآور:	معادلات دیفرانسیل/تألیف علی مردان شاهرزائی. مشخصات نشر: تهران: دانشگاه الزهراء(س)، انتشارات، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری:	ج. ۲: جدول. شابک: دوره: ۸-۲۸-۶۱۱۴-۶۲۲-۹۷۸؛ ج. ۱: ۱-۲۷-۶۱۱۴-۶۲۲-۹۷۸؛ ج. ۲: ۵-۲۹-۶۱۱۴-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی:	فیپا؛ یادداشت: کتابنامه؛ یادداشت: نمایه؛
مندرجات:	ج. ۱. ریزمواد معادلات دیفرانسیل: مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل، حل معادلات مرتبه‌ی اول و کاربرد آن در طبیعت.... ج. ۲. تأکیدی بر مثالهای حل شده
موضوع:	معادله‌های دیفرانسیل--راهنمای آموزش (عالی)؛ (Higher) Differential Equations -- Study and teaching
موضوع:	معادله‌های دیفرانسیل--آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)؛ (Higher) Differential Equations -- Examinations, questions, etc.
موضوع:	معادله‌های دیفرانسیل--مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)؛ (Higher) Differential Equations -- Problems, exercises, etc.
شناسه افزوده:	دانشگاه الزهراء- Alzahra University
رده‌بندی کنگره:	Q۳۷۱؛ رده‌بندی دیویی: ۵۱۵/۳۵۰۷۶؛ وضعیت رکورد: فیپا



معادلات دیفرانسیل ریزمواد معادلات دیفرانسیل (جلد اول)

تألیف:

دکتر علی مردان شاهرزائی

عضو هیأت علمی دانشگاه الزهراء(س)

ناشر: انتشارات دانشگاه الزهراء(س)
چاپ و صحافی: مرکز چاپ و انتشار دانشگاه پیام نور
طراح جلد: حمید چراغی
سال چاپ: زمستان ۱۳۹۹
نوبت چاپ: اول
تیراژ: ۳۰۰ نسخه
شابک جلد اول: ۱-۲۷-۶۱۱۴-۶۲۲-۹۷۸
شابک دوره: ۸-۲۸-۶۱۱۴-۶۲۲-۹۷۸
قیمت: ۱۳۰/۰۰۰ تومان

پیش‌گفتار مؤلف

خداوند بزرگ را سپاسگزار هستم که محبت او شامل این حقیر گردید تا این اثر را به پایان رسانم. مطابق برنامه ستاد انقلاب فرهنگی برای معادلات دیفرانسیل، مصوبه ۱۳۸۸/۲/۲۶ و اضافه شدن برخی ریز مواد جدید به سرفصل مصوب قبلی آن ستاد، این موضوع ما را بر آن داشت تا علاوه بر دو اثر قبلی، به تألیف کتاب معادلات دیفرانسیل دیگر با تغییرات زیاد و جامعی پردازیم تا پاسخگوی نیاز دانشجویان در رشته‌های مختلف دانشگاهی بخصوص رشته‌های فنی-مهندسی و علوم پایه باشد.

مطالب این کتاب حاصل تجربه‌ی سال‌ها تدریس و تألیف اینجانب در درس معادلات دیفرانسیل برای رشته‌های فنی-مهندسی، علوم پایه، بخصوص رشته‌های ریاضیات و کاربردها، آمار و کاربردها و علوم کامپیوتر و سایر رشته‌های مرتبط است و نگاهی نو به مطالب معادلات دیفرانسیل دارد و تمامی ریزمواد جدید برنامه ستاد انقلاب فرهنگی برای معادلات دیفرانسیل را در بر گرفته است و کلیدی مطالب موجود در این زمینه را به طور منسجم در خود جای داده است که امید است به عنوان یک اثر مفید مورد استفاده‌ی علاقمندان و دانش‌پژوهان قرار گیرد.

تنها پیش‌نیاز برای مطالعه‌ی این اثر، آشنایی با مطالب مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال است. خصوصیات بارز این نوشتار، تشریح روان و ساده‌ی مطالب، ارائه‌ی پیش‌زمینه‌های اصلی موضوعات و طراحی ماهرانه‌ی مثال‌ها و مسائل است به گونه‌ای که خواننده با مطالعه‌ی حل برخی از آن‌ها، روش‌های مفید دیگری را می‌آموزد و به وضوح می‌تواند به ارتباط این درس با دروس دیگر پی ببرد.

یکی از انگیزه‌های اصلی نگارنده در نوشتن این کتاب، تشویق متعلمین به ریاضیات و سایر رشته‌های وابسته است که مطابق موضوع تعیین شده توسط ستاد انقلاب فرهنگی برای ارتقاء به مقاطع تحصیلات تکمیلی، مطالب طبقه بندی شده است؛ به گونه‌ای راهکارهای جدید و مفیدی را پیش‌روی دانشجویان گرامی قرار می‌دهد. لذا مطالعه‌ی این کتاب به دانشجویان و داوطلبان جهت ورود به مقاطع تحصیلات تکمیلی در تمامی رشته‌های فنی-مهندسی، علوم پایه و سایر علوم توصیه می‌شود.

کتاب حاضر شامل ۶ فصل است. فصل اول اختصاص به مفاهیم اساسی معادلات دیفرانسیل دارد. معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول در فصل دوم ارائه شده است. فصل سوم به بحث معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم و بالاتر اختصاص داده شده است. در فصل چهارم برخی از روش‌های حل برخی معادلات دیفرانسیل معرفی شده‌اند. در فصل پنجم تبدیلات لاپلاس و کاربردهای آن در حل برخی معادلات دیفرانسیل بررسی شده‌اند. در فصل ششم حل برخی دستگاه معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان فصل‌های اول تا ششم، تعداد زیادی مسائل و تمرینات دوره‌ای، به خاطر سرفصل جدید برای

معادلات دیفرانسیل از طرف ستاد مذکور (حداقل ۲۵ ساعت حل تمرین) ارائه شده است. و لازم است متعلمین گرامی قبل از حل آن‌ها به مطالعه کامل مطالب در متن بپردازند.

مطالب این کتاب بیش از آن است که معمولاً در یک ترم تحصیلی و دوره‌های فشرده‌تر کارشناسی برای رشته‌های فنی-مهندسی، علوم پایه و سایر علوم تدریس می‌شود. این امر در طرح و چگونگی ارائه درس، آزادی بیش‌تری به استاد درس معادلات دیفرانسیل خواهد داد. به همین دلیل، توجه به این موارد مهم است که مطالبی که در بخش‌ها و زیربخش‌های ۹.۲، ۴.۱.۳، ۴.۳، ۵.۳، ۷.۳، ۲.۲.۴، ۳.۲.۴، ۴.۲.۴، ۲.۳.۴، ۳.۳.۴، ۴.۳.۴، ۵.۳.۴، ۲.۹.۵، ۲.۶، ۵.۶، و ۷.۶ آمده‌اند، قابل حذف است، بدون آن که پیوستگی مطالب به هم بخورد ولی الزاماً مطالب مشکل نیستند اما این مطالب معمولاً برای ورود به مقاطع تحصیلات تکمیلی مطرح می‌شوند و مطالعه‌ی آن‌ها به عزیزانی که قصد ادامه تحصیل دارند، توصیه می‌شود.

هر چند دقت زیادی به عمل آمده است تا کتاب عاری از لغزش باشد اما بی‌گمان چنین نیست و تذکرات خوانندگان گرامی در مورد لغزشهای احتمالی و از قلم افتادگی‌ها برای بهتر شدن این کتاب مورد استقبال نویسنده و موجب امتنان و سپاس فراوان از شما بزرگواران خواهد بود.

همراهی و تشویق خانواده‌ی عزیزم در تهیه و تنظیم این اثر در خور تقدیر است و این کتاب را به پسر عزیزم، علی محمد و دختر گلم، فاطمه زهرا تقدیم می‌نمایم و آرزوی موفقیت برای تمام فرزندان ایران سربلند دارم.

در انتها وظیفه می‌دانم از مسئولین دانشگاه، داوران، همکاران و عزیزانی که در تألیف و تایپ مطالب از نظرات گرانقدر آن‌ها بهره‌جسته‌ام، صمیمانه تشکر شود.

علی مردان شاه‌رضائی
عضو هیأت علمی دانشگاه الزهرا (س)

فهرست مطالب

vii	فهرست تصاویر
ix	فهرست جداول
۱	۱ مفاهیم اساسی معادلات دیفرانسیل
۱	۱.۱ تعاریف اساسی و طبیعت معادلات دیفرانسیل
۱۲	۲.۱ منشأ معادلات دیفرانسیل
۱۳	۱.۲.۱ حذف پارامترها در دسته منحنی‌ها و تشکیل معادلات دیفرانسیل
۱۶	۳.۱ مجموعه مسائل و تمرینات دوره‌ای برای فصل اول
۱۹	۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول
۲۰	۱.۲ معادلات دیفرانسیل با متغیرهای جداپذیر (تفکیک پذیر)
۲۵	۲.۲ معادلات دیفرانسیل قابل تبدیل به معادلات جداپذیر
۲۵	۱.۲.۲ معادله‌ی دیفرانسیل با ضریب خطی نسبت به یک متغیر
۲۷	۲.۲.۲ معادلات دیفرانسیل همگن (متجانس)
۳۲	۳.۲.۲ معادلات دیفرانسیل با ضرایب خطی نسبت به دو متغیر
۳۸	۴.۲.۲ برخی تبدیلات خاص
۴۳	۳.۲ معادله دیفرانسیل کامل
۴۸	۴.۲ عامل انتگرال ساز و کاربرد آن در حل معادلات غیرکامل
۵۰	۱.۴.۲ تعیین عامل انتگرال ساز برای برخی از معادلات مرتبه‌ی اول
۶۶	۵.۲ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول و تعمیم آن
۶۶	۱.۵.۲ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول
۷۳	۲.۵.۲ تعمیم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول
۷۸	۶.۲ معادلات دیفرانسیل غیرخطی قابل تبدیل به معادلات خطی

۷۸	معادلات برنولی و تعمیم آن	۱.۶.۲
۸۴	معادله‌ی ریکاتی	۲.۶.۲
۸۹	معادلات مرتبه‌ی اول با درجات نابرابر یک (دستور p)	۷.۲
۹۰	دستور p	۱.۷.۲
۱۰۸	معادله‌ی کلرو و معادله‌ی لاگرانژ	۲.۷.۲
۱۱۳	جواب ویژه، منفرد و یا استثنائی و جواب پوش	۳.۷.۲
۱۲۰	برخی کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول	۸.۲
۱۲۰	کاربرد معادلات دیفرانسیل در هندسه‌ی تحلیلی	۱.۸.۲
۱۲۵	کاربرد معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در طبیعت	۲.۸.۲
۱۳۴	* قضیه‌ی وجود و یکتایی جواب معادلات مرتبه‌ی اول با شرط اولیه *	۹.۲
۱۳۵	نظریه‌ی مقدماتی مسائل مقدار اولیه	۱.۹.۲
۱۳۸	روش تکرار پیکارد (یا روش تقریبات متوالی)	۲.۹.۲
۱۴۱	مجموعه مسائل و تمرینات دوره‌ای برای فصل دوم	۱۰.۲
۱۴۷	معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم و بالاتر	۳
۱۴۷	معادلات مرتبه‌ی دوم قابل تحویل به مرتبه‌ی اول	۱.۳
۱۴۷	معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم فاقد y	۱.۱.۳
۱۵۰	معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم فاقد x	۲.۱.۳
۱۵۲	معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم فاقد x و y	۳.۱.۳
۱۵۲	معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم همگن نسبت به y ، y' و y''	۴.۱.۳
۱۵۵	معادلات مرتبه‌ی دوم خطی همگن	۲.۳
۱۵۵	دستور آبل	۱.۲.۳
۱۵۹	معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت	۲.۲.۳
۱۶۴	تبدیل برخی معادلات خطی همگن با ضرایب متغیر به ضرایب ثابت	۳.۲.۳
۱۶۸	معادلات دیفرانسیلی کوشی-اوایلر و تعمیم آن (معادله‌ی لژاندر)	۴.۲.۳
۱۷۴	معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم خطی کامل و عامل انتگرال ساز	۵.۲.۳
۱۸۵	معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم خطی ناهمگن	۳.۳
۱۸۶	روش تغییر پارامترها برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم خطی ناهمگن	۱.۳.۳
۱۸۹	روش ضرایب نامعین برای حل معادلات خطی ناهمگن با ضرایب ثابت	۲.۳.۳
۱۹۸	روش عملگرهای معکوس برای حل معادلات خطی ناهمگن با ضرایب ثابت	۳.۳.۳
۲۱۶	* کاربرد عملگرهای معکوس در ریاضی عمومی (۱) *	۴.۳.۳
۲۲۱	روش استاندارد سازی برای حل برخی معادلات خطی	۴.۳

۲۲۸	اتخاذ تغییر متغیر مناسب و معادلات کامل خطی ناهمگن	۵.۳
۲۳۴	معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر از ۲	۶.۳
۲۳۶	معادلات مرتبه n ام خطی همگن	۱.۶.۳
۲۴۴	معادلات مرتبه n ام خطی ناهمگن	۲.۶.۳
۲۵۷	کاربرد معادلات مرتبه دوم در فیزیک و مکانیک	۷.۳
۲۵۷	میدان‌های نوسانات در دستگاه‌های مکانیکی	۱.۷.۳
۲۶۶	میدان‌های ارتعاشات در دستگاه‌های الکتریکی	۲.۷.۳
۲۷۱	مجموعه مسائل و تمرینات دوره‌ای برای فصل سوم	۸.۳

۲۸۱	حل برخی معادلات به روش سری‌ها	۴
۲۸۱	مقدمه‌ای بر سری‌ها	۱.۴
۲۸۶	نقاط عادی و غیرعادی یک معادله‌ی خطی مرتبه‌ی دوم و کاربرد سری تیلور	۱.۱.۴
۲۹۱	حل معادلات خطی مرتبه‌ی دوم حول یک نقطه‌ی عادی	۲.۴
۲۹۶	معادله‌ی لژاندر و معرفی چند جمله‌ای‌های لژاندر	۱.۲.۴
۳۰۶	معادله‌ی آیری	۲.۲.۴
۳۰۹	معادله‌ی هرمیت و معرفی چند جمله‌ای‌های هرمیت	۳.۲.۴
۳۱۲	معادله‌ی چبی شف و معرفی چند جمله‌ای‌های چبی شف	۴.۲.۴
۳۲۰	حل معادلات مرتبه‌ی ۲ حول یک نقطه‌ی غیرعادی منظم	۳.۴
۳۳۶	معرفی معادله‌ی بسل و توابع بسل مرتبه‌ی ν و کاربرد آن در حل معادلات	۱.۳.۴
۳۵۳	معادله‌ی فوق هندسی گاوس	۲.۳.۴
۳۶۳	معادله‌ی فوق هندسی هم‌ریز	۳.۳.۴
۳۶۶	معادله‌ی لاگر و معرفی چند جمله‌ای‌های لاگر	۴.۳.۴
۳۷۰	حل معادلات دیفرانسیل خطی به روش سری‌ها برای مقادیر بزرگ x	۵.۳.۴
۳۷۵	مجموعه مسائل و تمرینات دوره‌ای برای فصل چهارم	۴.۴

۳۸۱	تبدیل لاپلاس و کاربردهای آن	۵
۳۸۱	تبدیل لاپلاس، تبدیل لاپلاس معکوس و قضایای وجودی	۱.۵
۳۸۲	تعاریف بنیادی	۱.۱.۵
۳۸۳	شرط کافی برای وجود تبدیل لاپلاس یک تابع	۲.۱.۵
۳۸۵	محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس برخی توابع استاندارد	۳.۱.۵
۳۹۰	قضیه‌ی تبدیل مشتق یک تابع، تعمیم و کاربرد آن	۲.۵
۳۹۷	پیچش دو تابع، قضایای پیچش و تبدیل انتگرال و کاربردهای آن	۳.۵

۴۰۱	قضایای پیچش و تبدیل انتگرال و کاربردهای آن در حل معادلات خطی	۱.۳.۵
۴۰۵	کاربرد قضیه‌ی پیچش در حل معادلات انتگرالی	۲.۳.۵
۴۰۹	قضیه‌ی اول انتقال (انتقال روی محور sها) و کاربرد آن	۴.۵
۴۱۴	تابع گاما و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل	۵.۵
۴۲۱	توابع هوی‌ساید و دلتای دیراک، قضیه‌ی دوم انتقال و کاربرد آن	۶.۵
۴۳۱	قضیه‌ی مشتق تبدیل (لاپلاس) و کاربرد آن	۷.۵
۴۳۶	قضیه‌ی انتگرال تبدیل (لاپلاس) و کاربرد آن	۸.۵
۴۳۷	مباحث تکمیلی از تبدیلات لاپلاس	۹.۵
۴۳۷	توابع متناوب، تبدیل لاپلاس توابع متناوب و کاربرد آن	۱.۹.۵
۴۴۳	محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس معکوس به کمک مانده‌ها	۲.۹.۵
۴۴۸	مجموعه مسائل و تمرینات دوره‌ای برای فصل پنجم	۱۰.۵
۴۵۵	۶ دستگاه معادلات دیفرانسیل	
۴۵۵	مقدمه‌ای بر دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی	۱.۶
۴۵۹	حل دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت به روش حذفی	۲.۶
۴۶۲	حل دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت به روش عملگرها	۳.۶
۴۶۶	حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن	۴.۶
۴۶۷	روش تغییر پارامتر برای تعیین جواب خصوصی دستگاه معادلات خطی ناهمگن	۱.۴.۶
۴۷۰	روش ضرایب نامعین برای یافتن جواب خصوصی دستگاه خطی ناهمگن	۲.۴.۶
۴۷۲	حل دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت به روش تبدیل لاپلاس	۵.۶
۴۷۹	جبر ماتریسی و کاربرد آن در حل دستگاه‌های خطی با ضرایب ثابت	۶.۶
۴۸۴	همه‌ی مقادیر ویژه‌ی (ویژه مقدار) ماتریس ضرایب، حقیقی و متمایز اند:	۱.۶.۶
۴۸۶	برخی از مقادیر ویژه‌ی (ویژه مقدار) ماتریس ضرایب، مکرر اند:	۲.۶.۶
	برخی از مقادیر ویژه‌ی (ویژه مقدار) ماتریس ضرایب به صورت زوج‌های مختلط مزدوج اند:	۳.۶.۶
۴۸۸		
۴۹۳	کاربرد دستگاه معادلات دیفرانسیل در علوم و فنی-مهندسی	۷.۶
۴۹۳	حل برخی معادلات مرتبه‌ی دوم خطی به کمک دستگاه معادلات مرتبه‌ی اول	۱.۷.۶
۴۹۶	حل معادلات با ضرایب خطی نسبت به دو متغیر توسط دستگاه معادلات	۲.۷.۶
۴۹۸	مدار الکتریکی	۳.۷.۶
۵۰۰	معرفی دستگاه‌های غیرخطی	۴.۷.۶
۵۰۳	مجموعه مسائل و تمرینات دوره‌ای برای فصل ششم	۸.۶

۵۰۷

منابع و ماخذ

۵۰۹

نمايه

فهرست تصاویر

۷	نمودار توابع $y_1(x) = 3 x $ و $y_2(x) = 3x$ در بازه $(-0.5, 0.5)$	۱.۱
۱۲۳	مختصات قطبی نقطه‌ی P	۱.۲
۴۲۱	نمودار تابع هوی ساید	۱.۵
۴۲۲	نمودار تابع مربوط به مثال ۱.۶.۵، قسمت (د)	۲.۵
۴۴۸	نمودار مربوط به تمرین ۵.۹.۵	۳.۵
۴۵۰	نمودار مربوط به تمرین ۲۰.۱۰.۵	۴.۵
۴۵۳	نمودار مربوط به تمرین ۴۸.۱۰.۵ قسمت (الف)	۵.۵
۴۵۳	نمودار مربوط به تمرین ۴۸.۱۰.۵ قسمت (ب)	۶.۵
۴۵۳	نمودار مربوط به تمرین ۴۸.۱۰.۵ قسمت (ج)	۷.۵

فهرست جداول

۶۰	دیفرانسیل کامل برخی توابع خاص	۱.۲
۱۶۴	خلاصه‌ی از قضایای ۲.۲.۳، ۳.۲.۳ و ۴.۲.۳	۱.۳
۳۸۷	تبدیل لاپلاس و تبدیل لاپلاس معکوس برخی توابع خاص	۱.۵

